

*Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 23.9. mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä pakollista, vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

**Kotitehtävät:**

1. Olkoon  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, d\}$  ja  $C = \{a, c, d, e\}$ . Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:
  - (a)  $A \cup (C - B)$ ;
  - (b)  $B \times (A \cap C)$ ;
  - (c)  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \mathcal{P}(\emptyset)$ .

2. (a) Olkoon perusjoukon  $A = \{a, b, c, d\}$  relaatio  $R \subseteq A \times A$  määritelty:

$$R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, d), (d, b), (d, c)\}.$$

Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

$$(i) R, \quad (ii) R^{-1}, \quad (iii) R \circ R, \quad (iv) R \cap (R \circ R).$$

Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

- (b) Luettele kaikki joukon  $\{a, b, c\}$  ekvivalenssirelaatiot (ositukset).
3. Todista induktiolla oikeaksi kaava:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

**Demonstraatiotehtävät:**

4. Todista oikeiksi annetun perusjoukon  $U$  osajoukkojen  $A$  ja  $B$  yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhdetta koskevat *de Morganin kaavat*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. Määritellään perusjoukossa  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  relaatio  $\sim$  säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti (“geometrisesti”) sen ekvivalenssiluokkia.

6. Todista induktiolla, että jos  $X$  on äärellinen joukko, jonka koko on  $n = |X|$ , niin sen potenssijoukon koko on  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .