T-79.1001 **Syksy 2005**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet T
Harjoitus 7
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

Lemma (Säännöllisten kielten pumppauslemma). Olkoon A säännöllinen kieli. Tällöin on olemassa $n \geq 1$ siten, että kaikki A:n merkkijonot x , joiden pituus $|x| \geq n$ ovat ilmaistavissa muodossa $x = uvw$, missä $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ ja merkkijonot muotoa uv^iw kuuluvat kieleen A kaikilla $i \geq 0$.
Kompaktimmin, painottaen pumppauslemman asettamia vaatimuksia, voimme kirjoittaa seuraavasti:

$\forall$ säännöllisille kielille A

$\exists n \geq 1$ s.e.
$\forall x \in A : |x| \geq n$
$\exists$ osiinjako $x = uvw$, missä $|uv| \leq n$ ja $|v| \geq 1$
$\forall i \geq 0$ $uv^iw \in A$.

Pumppauslemmaa voidaan käyttää hyväksi, kun halutaan osoittaa kieli L *ei-säännölliseksi.* Tehdään ensin vastaoletus, eli oletetaan L säännölliseksi kieleksi. Tavoitteena on päästä ristiriitaan tämän oletuksen kanssa seuraten pumppauslemman asettamia vaatimuksia säännöllisille kielille.
Pumppauslemmaa käytettäessä täytyy aina muistaa, että sillä voi osoittaa vain kielen epäsäännöllisyyden, ja sitä *ei* voi käyttää toiseen suuntaan. Esimerkiksi kieli

$$I = \{c^ia^nb^n \mid i > 0 \wedge n \geq 0\} \cup L(a^*b^*)$$

ei ole säännöllinen, mutta kaikki siihen kuuluvat sanat (tyhjää sanaa lukuunottamatta) voidaan osittaa pumppauslemman ehtojen mukaisesti. Näin ollen kieltä I ei voida suoraan todistaa epäsäännölliseksi, vaan todistuksessa täytyy käyttää apuna säännöllisten kielten sulkeumaominaisuuksia.
Jos halutaan osoittaa kieli säännölliseksi, voidaan muodostaa sen hyväksyvä äärellinen automaatti, sillä pätee: Kieli L on säännöllinen $\Leftrightarrow$ on olemassa äärellinen automaatti M, joka hyväksyy kielen L (merkitään $L(M) = L$).

4. **Tehtävä**: Laadi algoritmi, joka testaa onko annetun yhteydettömän kieliopin $G = (V, \Sigma, P, S)$ tuottama kieli epätyhjä, so. voidaanko kieliopin lähtösymbolista S johtaa yhtään päätejonoa $x \in \Sigma^*$.

   Vastaus: Allaoleva proseduuri ?GeneratesNonemptyLanguage(G) ottaa syötteenä yhteydettömän kieliopin G, ja palauttaa arvon `true`, jos G:n generoima kieli ei ole tyhjä.

   ?GeneratesNonemptyLanguage($G = (V, \Sigma, P, S)$: context-free grammar)
   $T \leftarrow \Sigma$
   repeat $|V - \Sigma|$ **times**
   for each $A \to X_1 \cdots X_k \in P$
   if $A \notin T \wedge X_1 \cdots X_k \in T^k$
   $T \leftarrow T \cup \{A\}$
   if $S \in T$
   return **true**
   else
   return **false**

   Algoritmin idea on lähteä terminaalisymbolien joukosta Σ ja testata, onko näistä mahdollista perääntyä S:ään käyttäen joukon P produktioita käänteisesti. Perääntymistä simuloidaan iteroimalla $|V - \Sigma|$ kertaa saavutettavien symbolien joukkoa T.

Perusteluksi sille, että $|V - \Sigma|$ askelta riittää, tarkastellaan sanaa $z \in L(G)$, jolla on kielen sanoista kaikkein pienin jäsennyspuu. Jos z:lla on muotoa

$$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvwxy$$

oleva johto, missä $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, niin myös sana $z' = uwy$ voidaan johtaa kieliopin säännöillä[1]. Tällöin kuitenkin z':n jäsennyspuu on pienempi kuin z:n jäsennyspuu, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että z:n puu on pienin. Tästä seuraa se, että missään z:n minimaalisen jäsennyspuun haaroissa ei voi esiintyä sama välike kahteen kertaan, joten algoritmissa riittää käydä sääntöjoukko läpi yhtä monta kertaa kuin kieliopissa on välikkeitä.

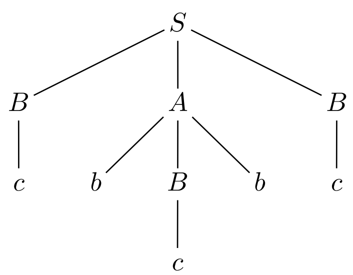
Tarkastellaan esimerkiksi kielioppia:

$$\begin{aligned} S &\to BAB \mid ABA \\ A &\to aAS \mid bBa \\ B &\to bBS \mid c \end{aligned}$$

Algoritmin laskenta etenee joukon T osalta seuraavasti:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{a, b, c\} \\ T_1 &= \{a, b, c, B\} && (B \to c) \\ T_2 &= \{a, b, c, A, B\} && (A \to bBa) \\ T_3 &= \{a, b, c, A, B, C, S\} && (S \to BAB, S \to ABA) \end{aligned}$$

Koska $|V - \Sigma| = 3$, algoritmin suoritus päättyy ja $T = T_3$. Huomataan, että $S \in T$, joten kieli ei ole tyhjä. Pienin kieleen kuuluvan sanan jäsennyspuu on:



5. **Tehtävä**: Muodosta kielioppia $G = (V, \Sigma, P, S)$ vastaava pinoautomaatti, kun

$$\begin{aligned} V &= \{S, (,), {}^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\ \Sigma &= \{(,), {}^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\ P &= \{S \to (SS), S \to S^*, S \to (S \cup S), \\ &\quad\ S \to \emptyset, S \to a, S \to b\} \end{aligned}$$

Vastaus: Mitä tahansa yhteydetöntä kielioppia $G = (V, \Sigma, R, S)$ vastaava epädeterministinen pinoautomaatti $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ voidaan laatia seuraavasti:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_{\mathrm{acc}}\} \\ \Gamma &= V \cup \{\bot\} \\ F &= \{q_{\mathrm{acc}}\} \\ \delta &= \{\big((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\bot)\big), \big((q_1, \bot, \varepsilon), (q_{\mathrm{acc}}, \varepsilon)\big)\} && (1) \\ &\quad \cup \{\big((q_1, \varepsilon, A), (q_1, \alpha)\big) \mid (A \to \alpha) \in P\} && (2) \\ &\quad \cup \{\big((q_1, \sigma, \sigma), (q_1, e)\big) \mid \sigma \in \Sigma\} && (3) \end{aligned}$$

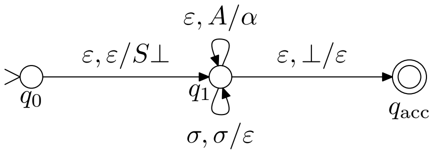
[1]Vertaa yhteydettömien kielten pumppauslemmaan.

Tässä symbolia $\perp$ käytetään pinon pohjan merkkinä.

Tehtävän kieliopille konstruktio tuottaa seuraavan pinoautomaatin:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1, q_{\mathrm{acc}}\} \\
\Sigma =& \{\mathbf{(}, \mathbf{)}, {}^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Gamma =& \{S, \mathbf{(}, \mathbf{)}, {}^*, \cup, \emptyset, a, b, \perp\} \\
F =& \{q_{\mathrm{acc}}\} \\
\delta =& \big\{ \big((q_0, e, e), (q_1, S\perp)\big), \big((q_1, \perp, e), (q_{\mathrm{acc}}, e)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, \mathbf{(}SS\mathbf{)})\big), \\
& \big((q_1, e, S), (q_1, S^*)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, \mathbf{(}S \cup S\mathbf{)})\big), \big((q_1, e, S), (q_1, \emptyset)\big), \\
& \big((q_1, e, S), (q_1, a)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, b)\big), \\
& \big((q_1, \mathbf{(}, \mathbf{(}), (q_1, e)\big), \big((q_1, \mathbf{)}, \mathbf{)}), (q_1, e)\big), \big((q_1, {}^*, {}^*), (q_1, e)\big), \\
& \big((q_1, \cup, \cup), (q_1, e)\big), \big((q_1, \emptyset, \emptyset), (q_1, e)\big), \big((q_1, a, a), (q_1, e)\big), \\
& \big((q_1, b, b), (q_1, e)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

Syntynyt automaatti on muotoa:



Tarkastellaan, miten automaatti käsittelee syötteen $(a \cup b^*)$:

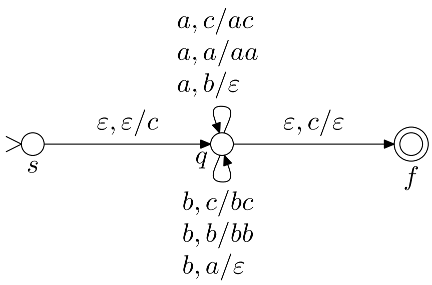
Tila	Syöte	Pino	Sääntö
q_0	$(a \cup b^*)$	ε	
q_1	$(a \cup b^*)$	$S\perp$	(1)
q_1	$(a \cup b^*)$	$(S \cup S)\perp$	(2) $(S \to (S \cup S))$
q_1	$a \cup b^*)$	$S \cup S)\perp$	(3)
q_1	$a \cup b^*)$	$a \cup S)\perp$	(2) $(S \to a)$
q_1	$\cup b^*)$	$\cup S)\perp$	(3)
q_1	$b^*)$	$S^*)\perp$	(2) $(S \to S^*)$
q_1	$b^*)$	$b^*)\perp$	(2) $(S \to b)$
q_1	$^*)$	$^*)\perp$	(3)
q_1	$)$	$)\perp$	(3)
q_1	ε	$\perp$	(3)
q_{acc}	ε	ε	(1)

Huom. kieli $L(G)$ määrittelee kaikki syntaktisesti oikeanmuotoiset aakkoston $\Sigma = \{a, b\}$ yli muodostetut säännölliset lausekkeet.

6. **Tehtävä**: Muodosta pinoautomaattia M vastaava kielioppi, missä $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{s, q, f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b, c\} \\
F =& \{f\} \\
\delta =& \big\{ \big((s, e, e), (q, c)\big), \big((q, a, c), (q, ac)\big), \big((q, a, a), (q, aa)\big) \\
& \big((q, a, b), (q, e)\big), \big((q, b, c), (q, bc)\big), \big((q, b, b), (q, bb)\big) \\
& \big((q, b, a), (q, e)\big), \big((q, e, c), (f, e)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Tilakaaviona M näyttää seuraavalta:



Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Tässä käytetään algoritmia, jotka toimii vain *yksinkertaisille* pinoautomaateille. Pinoautomaatti on yksinkertainen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jos $\big((q,u,\beta),(p,\gamma)\big)$ on pinoautomaatin siirtymä, niin $|\beta| \leq 1$.
- Jos $\big((q,u,e),(p,\gamma)\big) \in \delta$, niin myös $\big((q,u,A),(p,\gamma A)\big) \in \delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat sivuutetaan tässä).

Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen välikkeiksi kolmikkoja $\langle q, A, p\rangle$, missä $q, p \in Q$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. Ajatuksena on, että $\langle q, A, p\rangle$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$.
2. Kaikille siirtymille $\big((q,u,A),(r,B_1\cdots B_n)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*, n > 0$, $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ ja $B_1 \cdots B_n \in \Gamma$, lisätään sääntö
$$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, B_1, q_1\rangle\langle q_1, B_2, q_2\rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_n, p\rangle$$
kaikille $p, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q$.
3. Kaikille siirtymille $\big((q,u,A),(r,\varepsilon)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$, lisätään sääntö
$$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, \varepsilon, p\rangle$$
4. Kaikille $q \in Q$ lisätään sääntö $\langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon$.

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta. Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Kielioppi $G = (V, \Sigma, P, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{&S \to \langle s, e, f\rangle, && (1.)\\
&\langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon, \langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon, \langle f, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon, && (4.)\\
&\langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon\langle q, c, s\rangle, && (2./tr.1)\\
&\langle s, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon\langle q, c, q\rangle, && (2./tr.1)\\
&\langle s, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon\langle q, c, f\rangle, && (2./tr.1)\\
&\langle q, c, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.2)\\
&\langle q, c, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.2)\\
&\langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.2)\\
&\langle q, a, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', a, s\rangle && (2./tr.3)\\
&\langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', a, q\rangle && (2./tr.3)\\
&\langle q, a, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', a, f\rangle && (2./tr.3)\\
&\langle q, b, s\rangle \to a\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.4)\\
&\langle q, b, q\rangle \to a\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.4)\\
&\langle q, b, f\rangle \to a\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.4)\\
&\langle q, c, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.5)\\
&\langle q, c, q\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.5)\\
&\langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.5)\\
&\langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', b, s\rangle && (2./tr.6)\\
&\langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', b, q\rangle && (2./tr.6)\\
&\langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', b, f\rangle && (2./tr.6)\\
&\langle q, a, s\rangle \to b\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.7)\\
&\langle q, a, q\rangle \to b\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.7)\\
&\langle q, a, f\rangle \to b\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.7)\\
&\langle q, c, s\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.8)\\
&\langle q, c, q\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.8)\\
&\langle q, c, f\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.8)
\end{aligned}
$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$, ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$
\begin{aligned}
P = \{&S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle\\
&\langle s, \varepsilon, f\rangle \to \langle q, c, f\rangle\\
&\langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, c, f\rangle\\
&\langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, c, f\rangle\\
&\langle q, c, f\rangle \to \langle f, \varepsilon, f\rangle\\
&\langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, a, q\rangle\\
&\langle q, a, q\rangle \to b\langle q, \varepsilon, q\rangle\\
&\langle q, b, q\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, b, q\rangle\\
&\langle q, b, q\rangle \to a\langle q, \varepsilon, q\rangle\\
&\langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon\\
&\langle f, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $\langle q, c, f \rangle = S, \langle q, b, q \rangle = B, \langle q, a, q \rangle = A$, ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a\} \end{aligned}$$

Liite: Chomskyn normaalimuoto

Muutetaan viimeisen tehtävän kielioppi Chomskyn normaalimuotoon. Kielioppi on Chomskyn normaalimuodossa, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Ainoastaan alkuvälike S voi olla tyhjentyvä.
2. Alkuvälike S ei esiinny säännöissä oikealla puolella.
3. Mahdollisesti esiintyvää sääntöä $S \to \varepsilon$ lukuunottamatta kaikki säännöt ovat muotoa $A \to BC$ tai $A \to a$, missä A, B ja C ovat välikkeitä ja a terminaalisymboli.

Kielioppi muutetaan normaalimuotoon vaiheittain:

1. **Poistetaan lähtösymboli sääntöjen oikealta puolelta**.
   Koska kieliopissa on säännöt $S \to aAS$ ja $S \to bBS$, lisätään uusi lähtösymboli S' ja sääntö $S' \to S$. Saadaan tulokseksi sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\to S, \\ S &\to aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a \end{aligned}$$

2. **Poistetaan ε-produktiot**.
   Koska Chomskyn normaalimuodossa ainoastaan lähtösymboli S' saa olla tyhjentyvä, täytyy muut ε-säännöt poistaa kieliopista. Lasketaan aluksi tyhjentyvien välikkeiden joukko NULL:

$$\begin{aligned} \mathrm{NULL}_0 &= \{S\} && (S \to \varepsilon) \\ \mathrm{NULL}_1 &= \{S, S'\} && (S' \to S) \\ \mathrm{NULL}_2 &= \{S, S'\} = \mathrm{NULL} \end{aligned}$$

   Tämän jälkeen korvataan säännöt $A \to X_1 \cdots X_n$ joukolla sääntöjä

$$A \to \alpha_1 \cdots \alpha_2, \qquad \text{missä } \alpha_i = \begin{cases} X_i, X_i \notin \mathrm{NULL} \\ X_i \text{ tai } \varepsilon, X_i \in \mathrm{NULL} \end{cases}$$

   Lopuksi poistetaan kaikki säännöt muotoa $A \to \varepsilon$ (lukuunottamatta sääntöä $S' \to \varepsilon$). Saadaan tulokseksi sääntöjoukko[2]:

$$\begin{aligned} S' &\to S \mid \varepsilon \\ S &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a \end{aligned}$$

[2] Tarkkaan ottaen tässä vaiheessa pitäisi lisätä vielä uusi aloitusvälike S'' ja säännöt $S'' \to \varepsilon | S'$, mutta tässä tapauksessa ei synny ongelmia, vaikka käytetään S':a lähtösymbolina.

3. **Poistetaan yksikköproduktiot**.

   Seuraavaksi poistetaan kieliopista kaikki muotoa $A \to B$ olevat säännöt, missä sekä A että B ovat välikkeitä.

   Lasketaan ensin joukot $F(A)$ kaikilla $A \in V - \Sigma$:

$$\begin{aligned} F(A) &= F(B) = F(S) = \emptyset \\ F(S') &= \{S\} \end{aligned}$$

   Välike B kuuluu joukkoon $F(A)$ täsmälleen silloin, kun A:sta voidaan johtaa B käyttäen pelkkiä yksikköproduktioita.

   Sääntö $A \to B$ korvataan sääntöjoukolla $\{A \to w \mid \exists C \in F(B) \cup \{B\} : C \to w \in P\}$. Tulokseksi saadaan sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \mid \varepsilon \\ S &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a \end{aligned}$$

4. **Poistetaan liian pitkät produktiot**.

   Viimeisessä vaiheessa lisätään kielioppiin uusi välike C_σ sekä sääntö $C_\sigma \to \sigma$ kaikille $\sigma \in \Sigma$ sekä jaetaan kaikki säännöt $A \to w$ ($|w| > 2$) ketjuksi sääntöjä, jotka kaikki johtavat tismalleen kaksi symbolia.

   Annetun kieliopin Chomskyn normaalimuodoksi saadaankin seuraava sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\to C_a S'_1 \mid C_a A \mid C_b S'_2 \mid C_b B \mid \varepsilon \\ S'_1 &\to AS \\ S'_2 &\to BS \\ S &\to C_a S_1 \mid C_a A \mid C_b S_2 \mid C_b B \\ S_1 &\to AS \\ S_2 &\to BS \\ A &\to C_a A_1 \mid b \\ A_1 &\to AA \\ B &\to C_a B_1 \mid a \\ B_1 &\to BB \\ C_a &\to a \\ C_b &\to b \end{aligned}$$

Liite: CYK-algoritmi

CYK-algoritmilla voidaan tutkia kuuluuko sana $x = x_1 \cdots x_n$ kieliopin G määrittelemään kieleen. Algoritmin kuluessa lasketaan välikejoukot N_{ik}. Joukko N_{ik} käsittää kaikki ne välikkeet, joista voidaan johtaa osajono $x_i \cdots x_{i+k}$, eli sanan x kohdasta i alkava k:n merkin mittainen osajono. Joukkojen laskemisessa voidaan käyttää apuna dynaamista ohjelmointia seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} N_{i,1} &= \{A \mid (A \to x_i) \in P\} \\ N_{i,k} &= \bigcup_{j=1}^{k-1} \{A \in V - \Sigma \mid G\text{:ssä on sääntö } A \to BC, \end{aligned}$$

$$\text{missä } B \in N_{ij} \text{ ja } C \in N_{i+j,k-j}\}$$

Tarkastellaan kielioppia G:

$$
\begin{aligned}
S &\to C_aD \mid C_aA \mid C_aE \mid BC_b \mid a \mid b \\
A &\to C_aD \mid C_aA \mid a \\
B &\to C_aE \mid BC_b \mid b \\
D &\to AC_b \\
E &\to BC_b \\
C_a &\to a \\
C_b &\to b
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan, kuuluvatko sanat $w_1 = aabbb$ ja $w_2 = aabb$ kieleen $L(G)$. Koska w_2 on w_1:n prefiksi, täytyy taulukko tehdä ainoastaan sanalle w_1.

Lasketaan ensin joukot N_{i1}, $i \leq 5$:

$i \to$

		$1:a$	$2:a$	$3:b$	$4:b$	$5:b$
$k \downarrow$	1	$\underline{a}abbb$ $\{S, A, C_a\}$	$a\underline{a}bbb$ $\{S, A, C_a\}$	$aa\underline{b}bb$ $\{S, B, C_b\}$	$aab\underline{b}b$ $\{S, B, C_b\}$	$aabb\underline{b}$ $\{S, B, C_b\}$

Kussakin taulukon ruudussa on alleviivattuna sitä vastaava sanan osajono.

Lasketaan seuraavaksi N_{12}, eli niiden välikkeiden joukko, jolla voidaan johtaa sanan alussa oleva aa. Koska normaalimuotoisessa kieliopissa ei ole yhtään sääntöä, jolla voisi suoraan johtaa useamman kuin yhden terminaalisymbolin, voidaan aa saada ainoastaan siten, että johdetaan jostain välikkeestä kaksi a:n tuottavaa välikettä. Käytännössä tämä tapahtuu siten, että etsitään kaikki sellaiset välikkeet X, joille on olemassa sääntö $X \to YZ$, missä $Y \in N_{11}$ ja $X \in N_{21}$.

$$
\begin{array}{l} N_{11} = \{S, A, C_a\} \\ N_{21} = \{S, A, C_a\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad N_{12} = \{S, A\} \ .
$$

Tässä käytettiin sääntöjä $S \to C_aA$ ja $A \to C_aA$. Ruudulle N_{22} saadaan vastaavasti:

$$
\begin{array}{l} N_{21} = \{S, A, C_a\} \\ N_{31} = \{S, B, C_b\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad N_{22} = \{D\} \ .
$$

Ainoa ehdot täyttävä sääntö on $D \to AC_b$. Kokonaisuudessaan taulukon toiseksi riviksi muodostuu:

$i \to$

		$1:a$	$2:a$	$3:b$	$4:b$	$5:b$
	1	$\underline{a}abbb$ $\{S, A, C_a\}$	$a\underline{a}bbb$ $\{S, A, C_a\}$	$aa\underline{b}bb$ $\{S, B, C_b\}$	$aab\underline{b}b$ $\{S, B, C_b\}$	$aabb\underline{b}$ $\{S, B, C_b\}$
$k \downarrow$	2	$\underline{aa}bbb$ $\{S, A\}$	$a\underline{ab}bb$ $\{D\}$	$aa\underline{bb}b$ $\{S, B, E\}$	$aab\underline{bb}$ $\{S, B, E\}$	

Ruudun N_{13} kohdalla huomataan, että sanan kolme ensimmäistä merkkiä (aab) voidaan johtaa kahdella eri tavalla:

1. johdetaan a välikkeellä $X \in N_{11}$ ja ab välikkeellä $Y \in N_{22}$; tai
2. johdetaan aa välikkeellä $X \in N_{12}$ ja b välikkeellä $Y \in N_{31}$.

Vastaavat joukot ovat:

$$j = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N_{11} = \{S, A, C_a\} \\ N_{22} = \{D\} \end{array} \qquad j = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N_{12} = \{S, A\} \\ N_{31} = \{S, B, C_b\} \end{array}$$

Tapausta $j = 1$ vastaava välikejoukko on $\{S, A\}$ ($S \to C_aD$, $A \to C_aD$) ja tapausta $j = 2$ vastaava on $\{D\}$ ($D \to AC_b$), joten $N_{13} = \{S, A, D\}$. Samaan tapaan jatkamalla saadaan lopulta koko taulukoksi:

$i \to$

		$1 : a$	$2 : a$	$3 : b$	$4 : b$	$5 : b$
	1	$\underline{a}abbb$ $\{S, A, \underline{C_a}\}$	$a\underline{a}bbb$ $\{S, A, \underline{C_a}\}$	$aa\underline{b}bb$ $\{S, \underline{B}, C_b\}$	$aab\underline{b}b$ $\{S, B, \underline{C_b}\}$	$aabb\underline{b}$ $\{S, B, \underline{C_b}\}$
	2	$\underline{aa}bbb$ $\{S, A\}$	$a\underline{ab}bb$ $\{D\}$	$aa\underline{bb}b$ $\{S, B, \underline{E}\}$	$aab\underline{bb}$ $\{S, B, E\}$	
$k \downarrow$	3	$\underline{aab}bb$ $\{A, S, D\}$	$a\underline{abb}b$ $\{S, \underline{B}\}$	$aa\underline{bbb}$ $\{S, B, E\}$		
	4	$\underline{aabb}b$ $\emptyset$	$a\underline{abbb}$ $\{S, B, \underline{E}\}$			
	5	$\underline{aabbb}$ $\{\underline{S}, B\}$				

Viimeisessä vaiheessa täytyi käydä läpi neljä eri kombinaatiota: (N_{11}, N_{24}), (N_{12}, N_{33}), (N_{13}, N_{42}) sekä (N_{14}, N_{51}).

Koska $S \in N_{15}$, niin $aabbb \in L(G)$. Toisaalta, koska $S \notin N_{1,4}$, niin $aabb \notin L(G)$. Taulukosta voidaan konstruoida suoraan sanan w_1 jäsennyspuu käymällä se läpi takaperin: S saadaan ruutuun N_{15} ruuduista N_{11} ja N_{24} käyttäen välikkeitä C_a ja E, joten ensimmäisenä käytetään sääntöä $S \to C_aE$. Ylläolevassa taulukossa on sanan w_1 johdossa käytetyt välikkeet alleviivattu. Kokonaisuudessaan jäsennyspuu on seuraavanlainen: